

Erweiterung der Sommerfeldschen Arbeiten über Resonanzwirkungen bei Schraubenfedern

Von WALTHER MEISSNER

Aus dem Laboratorium für technische Physik der Technischen Hochschule München
(Z. Naturforschg. 3a, 546—548 [1948]; eingegangen am 5. August 1948)

Die Sommerfeldschen Arbeiten über Resonanzschwingungen von Schraubenfedern werden erweitert durch Hinzunahme der Pendelschwingungen der Feder zu den Drehschwingungen und Vertikalschwingungen. Es wurde theoretisch und experimentell vom Verf. gefunden, daß folgender Fall möglich ist: Die Energie wandert periodisch nacheinander völlig von der einen Art der Schwingung in die beiden anderen Arten der Schwingungen. Genauer behandelt wurde* experimentell und theoretisch zunächst der einfache Fall, daß entweder die Kopplung zwischen Drehschwingung und Vertikalschwingung, oder die Kopplung zwischen Drehschwingung und Pendelschwingung, oder die Kopplung zwischen Vertikalschwingung und Pendelschwingung Null ist. Hierbei tritt nur bei zwei der drei Schwingungsarten der Fall auf, daß die Energie für einen Moment völlig in diese wandert.

Sommerfeld¹ hat die Resonanz zwischen der Drehschwingung (Biegeschwingung) und der Vertikalschwingung (Torsionsschwingung) einer belasteten Schraubenfeder theoretisch und experimentell eingehend behandelt und zur Bestimmung der Poissonschen Zahl verwendet. Gelegentlich einer Arbeit über die Längsschwingungen belasteter Schraubenfedern² habe ich die Sommerfeldschen Resonanzschwingungen hergestellt und bin dabei auf die Idee gekommen, auch die dritte der bei einer Schraubenfeder möglichen Schwingungsarten, die Pendelschwingung, hinzuzunehmen. Es gelang mir experimentell, den Fall zu verwirklichen, daß die gesamte Schwingungsenergie von der einen Art der Schwingung nacheinander in die anderen Arten überging, so daß für einen Moment die gesamte Schwingungsenergie allein jeweilig in der einen der drei Schwingungsarten enthalten war. Die genauere Verfolgung dieser Erscheinung wurde durch den Krieg verzögert, und ich habe sie erst 1947 aufnehmen lassen*. Dabei ist zunächst nur ein Teil der möglichen Resonanzschwingungen behandelt worden, über den ich schon heute kurz berichten möchte, um dem Jubilar ein kleines Geburtstagsgeschenk zu machen.

* Diplomarbeit Hermann Riese, München 1947.

¹ A. Sommerfeld, Wüllner-Festschrift, Leipzig 1905, S. 162—193. Vorlesungen I, Mechanik, Leipzig 1943, S. 106; Vorlesungen II, Mechanik deformierbarer Medien, Leipzig 1945, S. 294.

² W. Meißner u. G. Meißner, S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1938, 79.

Es seien x die Auslenkung (Verdrehungswinkel) der Drehschwingung, y die Auslenkung der Vertikalschwingung, z die der Pendelschwingung, $\omega_{1,0}$, $\omega_{2,0}$, $\omega_{3,0}$ die Eigenkreisfrequenzen der drei Schwingungen, a_1 , a_2 die Kopplungskoeffizienten zwischen der x -Schwingung und den beiden anderen Schwingungen, b_1 , b_2 die Kopplungskoeffizienten für die y -Schwingung, c_1 , c_2 die für die z -Schwingung. Sieht man von der Dämpfung der Schwingungen ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_{1,0}^2 x + a_1 y + a_2 z &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_{2,0}^2 y + b_1 x + b_2 z &= 0, \\ \ddot{z} + \omega_{3,0}^2 z + c_1 x + c_2 y &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß (Abb. 1) nur der Befestigungsdraht A, nicht die Feder F selbst durch die Pendelschwingung verformt wird, was experimentell mit genügender Annäherung zu erreichen ist. Dann werden die Beziehungen zwischen Drehschwingung und Vertikalschwingung nicht gestört. Die Kopplung zwischen diesen und der Pendelschwingung tritt allein durch die Wirkung des Befestigungsdrahtes auf und ist der Auslenkung der Pendelschwingung proportional entsprechend (1). Es wurde nun experimentell zunächst der Fall behandelt, daß entweder $b_2 = c_2 = 0$ (Fall 1: keine Kopplung zwischen Vertikal- und Pendelschwingung), oder $a_1 = b_1 = 0$ (Fall 2: keine Kopplung zwischen Dreh- und Vertikal-



schwingung), oder $a_2 = c_1 = 0$ (Fall 3: keine Kopplung zwischen Dreh- und Pendelschwingung) ist. Fall 1 wurde dadurch verwirklicht, daß der Punkt P (Abb. 1) an einem Faden B aufgehängt war. Im Fall 2 wurde Punkt P durch einen

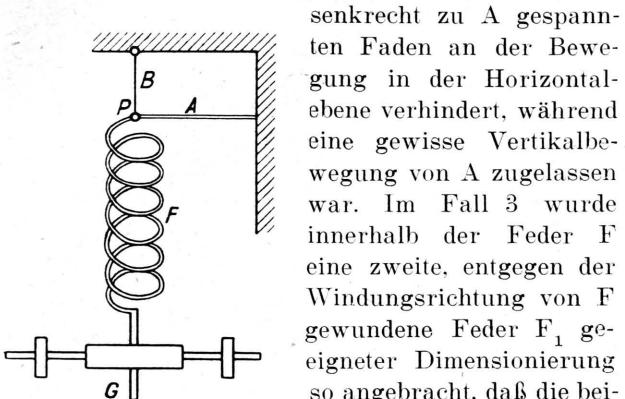


Abb. 1.
Versuchsanordnung.

senkrecht zu A gespannten Faden an der Bewegung in der Horizontalen Ebene verhindert, während eine gewisse Vertikalbewegung von A zugelassen war. Im Fall 3 wurde innerhalb der Feder F eine zweite, entgegen der Windungsrichtung von F gewundene Feder F_1 geeigneter Dimensionierung so angebracht, daß die beiden Federn am oberen und unteren Ende verbunden waren und infolgedessen bei der Vertikalschwingung der Feder keine Drehung der Last G stattfand. Damit die nun mit der Vertikalschwingung gekoppelte Pendelschwingung in derselben Ebene schwingt wie bei der Kopplung mit der Drehschwingung, wurde der horizontale Spanndraht für P in diesem dritten Fall nicht senkrecht zum Befestigungsdraht A

geben, daß die Federwindungen im unbelasteten Zustand einen Druck aufeinander ausübten. Es wurde dazu nach dem Wickeln der Feder das eine Federende durch die Feder hindurchgezogen, so daß die Feder „umgekrempt“ war. Außerdem

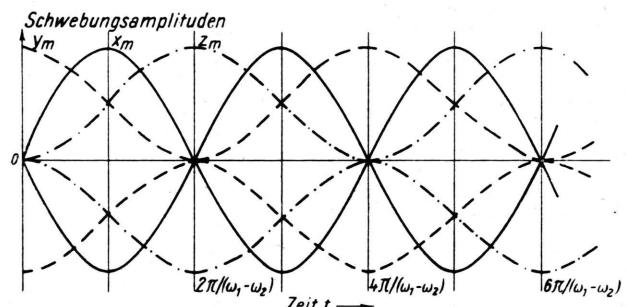


Abb. 2. Schwebungsamplituden der 3 Schwingungsarten.

wurde die Last G vertikal verschiebbar angeordnet. Ihr Trägheitsmoment war durch seitlich angebrachte verschiebbare Zusatzgewichte veränderlich (Abb. 1).

Die Fälle 2 und 3 gehen aus (2) durch Vertauschung von x mit y und z hervor, so daß für sie besondere Gleichungen nicht angesetzt zu werden brauchen.

Es seien nun reine Sinusschwingungen vorausgesetzt. Für $t_0 = 0$ sei $y_0 = L$, $x_0 = z_0 = 0$. Dann

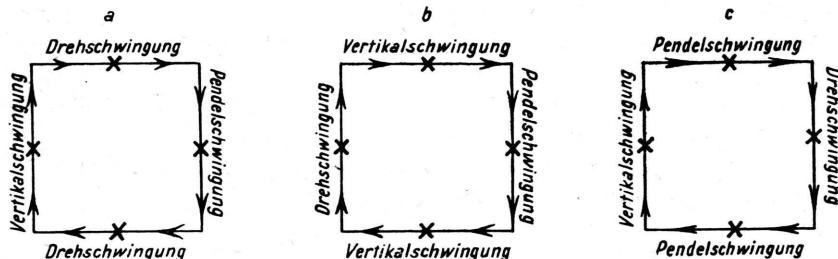


Abb. 3. Art der Energiewanderung in den 3 Fällen.

gespannt, sondern unter einem Winkel von 30° zu diesem. Es sind dann jeweils verschiedene Komponenten der Kopplungskräfte wirksam.

Setzt man, wie es dem Experiment entspricht, $\omega_{1,0} = \omega_{2,0} = \omega_{3,0} = \omega_0$, so wird im Fall 1 aus (1)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + a_1 y + a_2 z &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y + b_1 x &= 0, \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z + c_1 x &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Damit auch $\omega_{3,0} = \omega_0$ gemacht werden konnte, wurde der Feder eine solche Vorspannung ge-

erhält man durch etwas langwierige Ableitungen, die hier aber übergangen werden mögen.

$$\begin{aligned} x &= -L \sqrt{\frac{2}{b_1}} \sin \omega_0 t \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t, \\ y &= L \cos \omega_0 t \cos^2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} t, \\ z &= -\frac{c_1}{b_1} L \cos \omega_0 t \sin^2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} t, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \sqrt{2 a_1 b_1}; \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 - \sqrt{2 a_1 b_1}. \quad (3a)$$

Diese Lösung von (2) konnte in allen drei oben angegebenen Fällen experimentell genau verifiziert werden. Abb. 2 gibt die graphische Darstellung der Schwebungsamplituden. Man sieht, daß für das Maximum von y_m bzw. z_m wohl x_m und z_m bzw. x_m und $y_m = 0$ ist, daß dann also die ganze Energie in der y - bzw. z -Schwingung steckt, daß aber für das Maximum von x_m weder y_m noch $z_m = 0$ ist.

Im Fall 1 pendelt die Energie von der Vertikalschwingung über die Drehschwingung zur Pendelschwingung (Abb. 3a) und weiter über die Drehschwingung

zur Vertikalschwingung. Im Fall 2 pendelt die Energie zwischen Dreh- und Pendelschwingung über die Vertikalschwingung (Abb. 3b). Im Fall 3 pendelt die Energie zwischen Vertikal- und Drehschwingung über die Pendelschwingung (Abb. 3c).

Über weitere Resonanzschwingungen, die dem Gleichungssystem (1) entsprechen, hoffe ich später berichten zu können, insbesondere über den Fall des völligen zyklischen Energieaustausches zwischen den drei Schwingungsarten und die dafür notwendigen Bedingungen.

Bemerkungen zur Schwingungstheorie dünner elastischer Platten¹

Von FRITZ SAUTER²

(Z. Naturforsch. 3a, 548—552 [1948]; eingegangen am 30. Juli 1948)

Der natürliche Weg zum Verständnis der Schwingungsvorgänge bei dünnen Platten, nämlich der über die strengen Lösungen der elastischen Grundgleichungen, ist bisher in der Literatur wenig beachtet worden. Diese strenge Integration ergibt für Platten endlicher Dicke bei vorgegebener Laufgeschwindigkeit c der Wellen parallel zur Platte (= Schnittgeschwindigkeit) ein diskretes Spektrum zugehöriger Schwingungsfrequenzen. Seine Diskussion führt im Grenzfall dünner Platten zu drei bestimmten Dispersionsgesetzen für die drei verschiedenen Schwingungstypen (Scherungs-, Dehnungs- und Biegungsschwingungen), aus denen man leicht die für diesen Grenzfall vereinfachten Schwingungsgleichungen sowohl in erster wie auch in höherer Näherung gewinnen kann. Im besonderen wird so anschaulich verständlich, warum die Differentialgleichung für die Biegungsschwingungen dünner Platten von vierter Ordnung in den Raumableitungen ist.

Der begrifflich einfachste, wenn auch rechnerisch nicht gerade kürzeste Weg zur Ableitung der Schwingungsgleichungen für elastische Körper, die in einer oder zwei Dimensionen „dünn“ sind (wie die Platten, Schalen, Stäbe), führt über die strenge Integration der elastischen Grundgleichungen für Körper mit endlichen Dimensionen und die nachträgliche Entwicklung der Lösungen nach irgendwelchen kleinen Größen. Im besonderen kann man auf diese Weise leicht auch die höheren Näherungen für die vereinfachten Schwingungsgleichungen gewinnen, denen diese dünnen Gebilde gehorchen müssen. Dies soll hier am Beispiel der Schwingungen einer planparallelen Platte gezeigt werden. Denn es erscheint jetzt, wo sich die technische Mechanik in

steigendem Maße für dynamische Vorgänge in Platten und Stäben zu interessieren beginnt, nicht abwegig, erneut das Augenmerk auf diese wenn auch wohl nicht neue, so doch viel zu wenig beachtete Methode zu lenken. Es kommt noch dazu, daß dieses Verfahren nebenbei eine anschauliche Begründung liefert für die bekannte Tatsache, daß die Differentialgleichung für die Biegungsschwingungen von Platten, wie auch für die von Schalen und Stäben, hinsichtlich der Ableitungen nach den Raumkoordinaten von vierter Ordnung ist, im Gegensatz zu den elastischen Grundgleichungen und auch zu den Differentialgleichungen für die Dehnungs-, Scherungs- und Torsionsschwingungen, die in den Raum- und Zeitableitungen homogen von zweiter Ordnung sind.

Es möge also im folgenden eine planparallele Platte der Dicke $2h$ betrachtet und deren Mittel ebene zur x, y -Ebene eines Koordinatensystems

¹ Hrn. Geheimrat Prof. Dr. A. Sommerfeld zur Erinnerung an seine Tätigkeit als technischer Mechaniker vor rund einem halben Jahrhundert zum 5. Dez. 1948 ehrfurchtsvoll gewidmet.

² Weil a. Rhein, Kanderstr. 45.